AKADEMIET VIDEREGÅENDE SKOLE

LEKTOR SELAND

Klikk her for videoleksjoner

Løsning eksamen i matematikk R1 Høsten 2024

Del 1

Oppgave 1

$$f(x)=\frac{e^{2x}}{x},\quad f'(x)=\frac{(e^{2x})'\cdot x+(e^{2x})\cdot x'}{x^2}=\frac{2e^{2x}\cdot x+e^{2x}\cdot 1}{x^2}=\underline{\underline{\frac{e^{2x}(2x+1)}{x^2}}}$$

Oppgave 2

Programmet starter med en funksjon $O(x)$ og verdien $x=0$. Deretter leter programmet etter den x-verdien som er slik at funksjonen ikke lengre stiger. Med andre ord, programmet leter etter et toppunkt. Vi kan derfor gjøre følgende:

$$\begin{aligned}O(x)&=-0.1x^2+2000x-50000\\O'(x)&=-0.2x+2000\end{aligned}$$

Finner selve toppunktet:

$$\begin{aligned}O'(x)&=0\\-0.2x+2000&=0\\0.2x&=2000\\x&=\frac{2000}{0.2}=\underline{\underline{10000}}\end{aligned}$$

Ettersom punktet er et heltall, og x øker med 1 for hver runde i løkka, kommer programmet til så skrive ut "10000".

Oppgave 3

$$
\begin{aligned}
100^x - 3\cdot 10^x &= 4 \\
\left(10^2\right)^x - 3\cdot 10^x - 4 &= 0 \\
\left(10^x\right)^2 - 3\cdot 10^x - 4 &= 0
\end{aligned}
$$

$$10^x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1\cdot (-4)}}{2\cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3\pm 5}{2}$$

Vi får to likninger:

$$10^x = 4 \quad \vee \quad 10^x = -1$$

Det er ikke mulig å opphøye 10 i noe og få et negativt tall, dermed trenger vi bare å løse:

$$
\begin{aligned}
10^x &= 4 \\
x &= \underline{\underline{\lg 4}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 4

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-12}{2x^2-18} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{12}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{18}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{12}{x^2}}{2 - \frac{18}{x^2}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Oppgave 5

a)

Når vi finner lengdene av en vektor kan vi se bort fra fortegnet til tallene i vektoren. Dermed kan vi se at $|\vec{u}| = |\vec{w}|$. Ingen av de andre vektorene er like lange.

For å finne ortogonale vektorer bruker vi at: $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. Det kan kun skje hvis leddene i skalarproduktet har motsatt fortegn, dermed er det lurt å undersøke:

$$
\begin{aligned}
\vec{v}\cdot\vec{p} &= 4\cdot 8 + (-6)\cdot 12 \neq 0 \\
\vec{u}\cdot\vec{p} &= 3\cdot 8 + (-2)\cdot 12 = 0
\end{aligned}
$$

De andre kan vi se fra fortegnene at ikke vil gi 0 i skalarproduktet. Derfor er $\vec{u}$ og $\vec{p}$ de eneste som er ortogonale med hverandre.

b)

$$\begin{aligned} \vec{u} + 2\vec{q} &= [7,5] \\ [3,-2] + 2[2a-3, 1+3b] &= [7,5] \\ [3+4a-6, -2+2+6b] &= [7,5] \\ [-3+4a, 6b] &= [7,5] \end{aligned}$$

Skal likningen gå opp, så må x-komponentene være like og y-komponentene være like.

x-komponentene:

$$\begin{aligned} -3+4a &= 7 \\ 4a &= 10 \\ a &= \frac{10}{4} = \underline{\underline{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

y-komponentene:

$$\begin{aligned} 6b &= 5 \\ b &= \underline{\underline{\frac{5}{6}}} \end{aligned}$$

Oppgave 6

Vi starter med å finne den gjennomsnittelige vekstfarten for de tre funksjonene i intervallet [0,4].

Tredjegradsfunksjonen (rød):

$$\frac{4-4}{4-0} = 0$$

Førstegradsfunksjonen (blå):

$$\frac{4-2}{4-0} = \frac{1}{2}$$

Andregradsfunksjonen (gul):

$$\frac{2-0}{4-0} = \frac{1}{2}$$

Den deriverte i $x = 1$ skal være 1 for den riktige funksjonen. En førstegradsfunksjon er en rett linje, som grafen viser. Disse har en konstant stigning, som betyr at den momentane og gjennomsnittelige vekstfarten er den samme. Dermed kan vi konkludere med at andregradsfunksjonen er den oppgaven spør etter.

Del 2

Oppgave 1

1. $V(t) := 10000\, e^{-0.07t} + 500$

   $\rightarrow\ V(t) := 10000\, e^{\frac{-7}{100}t} + 500$

2. $V(t) = \frac{1}{2}\, V(0)$

   Løs: $\left\{ t = \frac{-100}{7} \ln\left(\frac{19}{40}\right) \right\}$

3. $\$2$

   $\approx \{t = 10.635\}$

4. $V'(12)$

   ≈ -302.197

5. $V''(12)$

   ≈ 21.154

6. Asymptote(V)

   $\approx \{y = 500\}$

a)

Fra celle 1 - 3 ser vi at det vil ta 10.6 timer før vannreservoaret er halvert.

b)

Verdiene ser vi i celle 4 og 5. Vi ser at etter 12 timer, så minker volumet i reservoaret med ca 302 liter per time. Den dobbelderiverte er positiv, som betyr at den deriverte vil stige i verdi, altså bli mindre negativ. Vi kan tolke det som farten på lekasjen vil avta med ca 21 liter i timen, per time.

c)

I celle 6 ser vi at V har en asymptote på $y = 500$. Dette er en horisontal asymptote og representerer antall liter reservoaret vil stabilisere seg på etterhvert som lekasjen avtar.

Oppgave 2

a)

Vi kan lete etter et moteksempel for å avgjøre om påstanden er usann. Et mulig slik eksempel er:

$$f(x) = e^{-x^2}, \quad g(x) = \frac{1}{x^2}$$

Begge har like grenseverdier når $x \to \pm\infty$, men er ikke samme funksjon. Et annet eksempel kan være:

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{2}{x}$$

b)

Funksjonen $f(x) = |x|$ kan skrive som en funksjon med delt forskrift slik:

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

Denne funksjonen består av kontinuerlige og deriverbare funksjoner. I bruddpunktet derimot kan vi se at

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -1, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

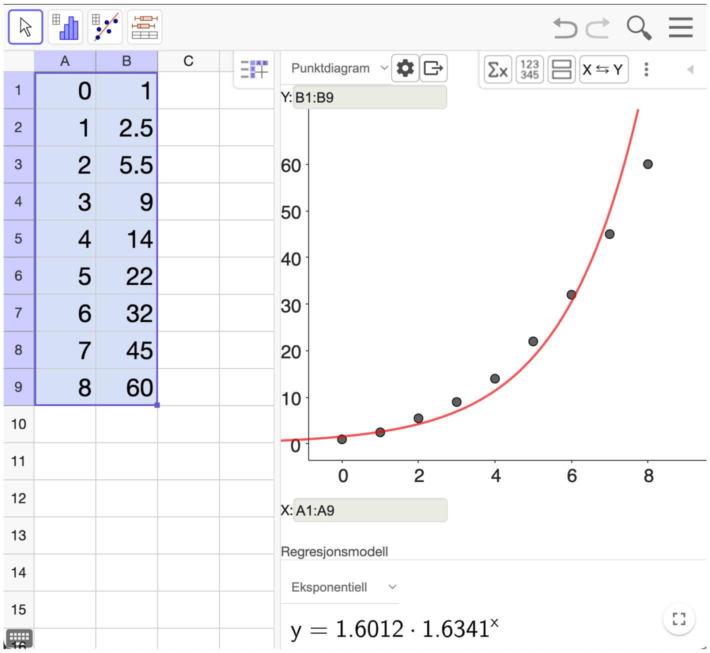
Dermed er funksjonen ikke deriverbar i $x = 0$. Påstanden er derfor sann

c)

Likningen $a^x = a^y$ har fire løsninger. Enten er $x = y$, eller så er $a = 1$, eller $a = 0$. Den fjerde løsningen er hvis $a = -1$. Da må enten både x og y være partall, eller så må begge være oddetall. Påstanden er derfor usann.

Oppgave 3

a)

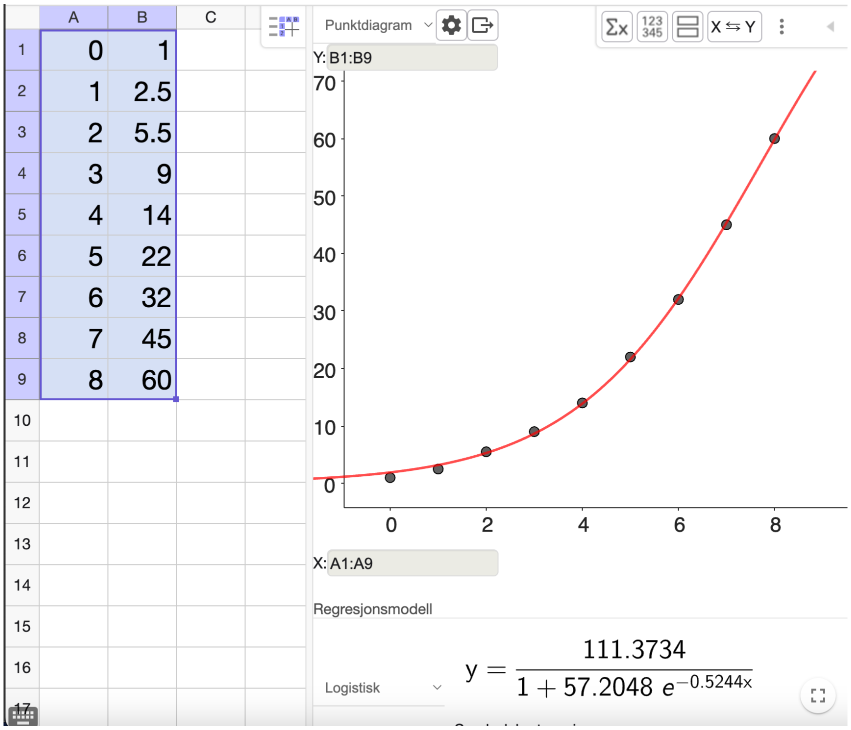


Utførte eksponentiell regresjon på verdiene i tabellen. Resultatet er at

$$A_0 \approx 1.60$$
$$k \approx 1.63$$

A_0 er startverdien for bestanden, det betyr at modellen antar at startbestanden var på omtrent 1600 fisk. k er vekstfaktoren, og forteller oss at ifølge modellen vokser bestanden med 63 % per måned.

b)



Utførte logistisk regresjon på dataene i tabellen. Vi ser at

$$B \approx 111$$

$$r \approx -0.52$$

For å finne N_0 må vi løse likningen:

$$\frac{B - N_0}{N_0} = 57.2$$

Bruker CAS:

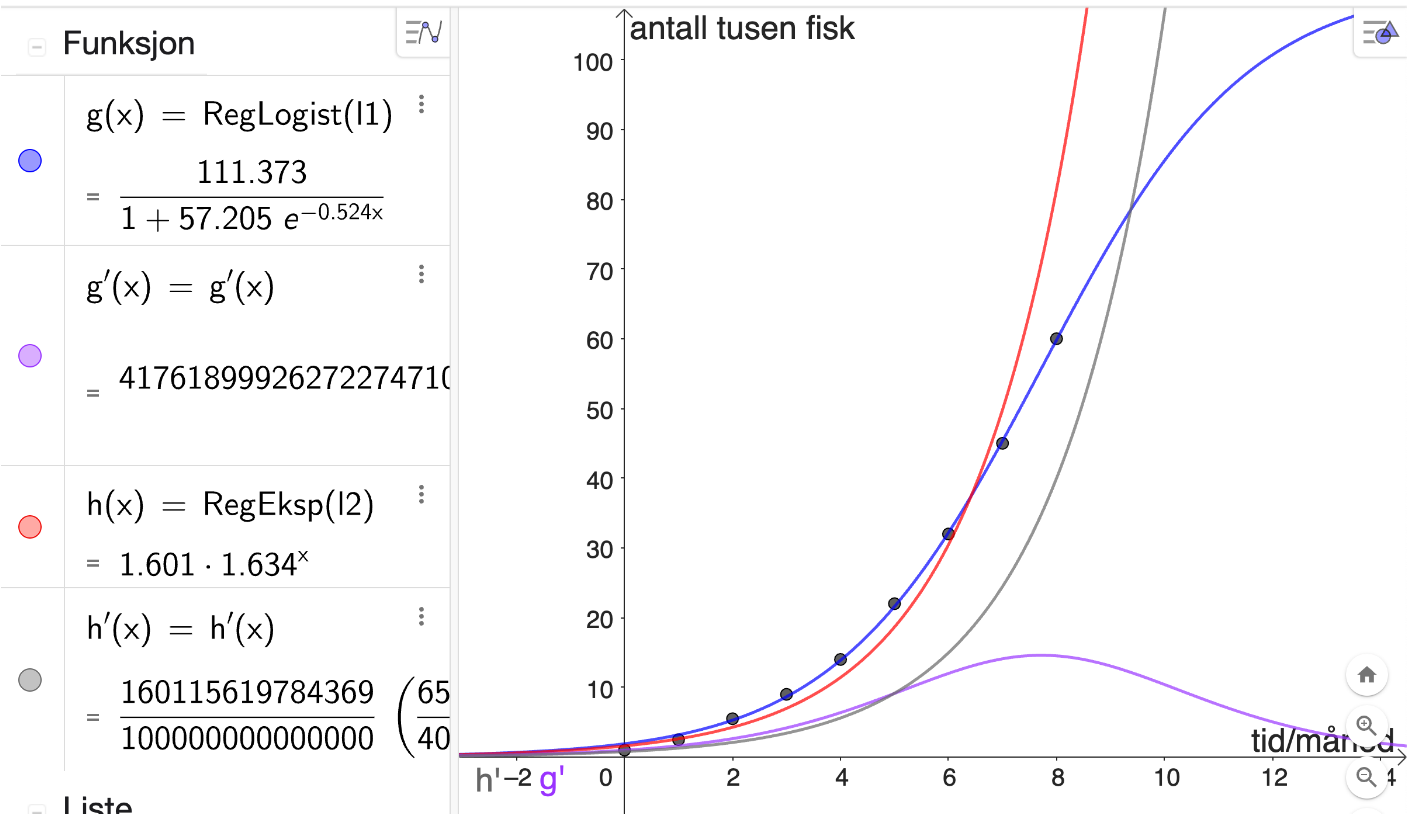
1 $\dfrac{111.37 - N_0}{N_0} = 57.2$

Løs: $\left\{N_0 = \dfrac{11137}{5820}\right\}$

2 $1

$\approx \{N_0 = 1.914\}$

c)



Jeg eksporterte grafene til grafikkfeltet og deriverte grafene. Uttrykkene ble veldig lange, så jeg nøyer meg med å nevne at den lilla grafen er den deriverte til den logistiske funksjonen, og den grå er den deriverte av den eksponentielle funksjonen. Vi ser at ifølge den eksponentielle modellen, så vil vekstfarten øke uendelig, som betyr at det blir flere og flere fisk raskere og raskere. Den logistiske modellen derimot har alltid en positiv stigning, men den går mot 0 etterhvert som tiden går. Med andre ord vil økningen i bestanden avta.

d)

Den logistiske modellen beskriver veksten best. Alle økosystemer har en bæreevne, altså det maksimale antallet individer som kan leve før det blir f.eks matmangel.

Etter 12 måneder vil det være 580 fisk ifølge denne modellen.

$$a = h(12)$$
$$= 580.322$$

Oppgave 4

Fra grafen ser vi at $y = 1$ når $x = 5$. Spørsmålet da er hvilken logaritme er slik at

$$\log_a(5) = 1$$

Sagt annerledes: Hvilket tall må opphøyes i 1 for å få 5? Svaret er 5, så a må være 5.

Oppgave 5

a)

En funksjon har en omvendt funksjon hvis det er slik at for hver x-verdi, så har grafen bare én y-verdi, og for hver y-verdi så finnes det bare én x-verdi. Det er tilfelle for de to første grafene, mens den siste kan ha flere x-verdier som passer med f.eks $y = 5$. Derfor har den siste ingen omvendt funksjon.

b)

Den første funksjonen ser ut til å være en andregradsfunksjon. Jeg ser at

$$f(0) = 3$$
$$f(1) = 1 + 3$$
$$f(2) = 4 + 3$$

Dette passer med funksjonen

$$f(x) = x^2 + 3$$

Definisjonsmengden er $D_f = [0, 2\rangle$. Verdimengden er $V_f = [3, 7\rangle$.

Vi finner den omvendte funksjonen:

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 3 \\ x^2 &= y - 3 \\ x &= \pm\sqrt{y-3} \end{aligned}$$

Siden $x \in [0, 2\rangle$, så må vi velge det positive fortegnet for å få riktig omvendt funksjon.

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y-3}$$

Videre er $D_{f^{-1}} = V_f = [3, 7\rangle$.

For den neste funksjonen kan vi lese av grafen at

$$g(x) = \begin{cases} x - 1 & -2 < x < 1 \\ -2x + 4 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Vi jobber med hver del av funksjonen for seg selv:

$$\begin{aligned} y &= x - 1 \\ x &= y + 1 \end{aligned}$$

Finner så verdimengden.
Nedre grense: $y = -2 - 1 = -3$.
Øvre grense: $y = 1 - 1 = 0$.

Den andre delen:

$$\begin{aligned} y &= -2x + 4 \\ 2x &= 4 - y \\ x &= \frac{4-y}{2} \end{aligned}$$

Finner så verdimengden.
Nedre grense: $y = -2 \cdot 2 + 4 = 0$.
Øvre grense: $y = -2 \cdot 1 + 4 = 2$.

Dermed kan vi skrive den omvendte funksjonen som:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y+1 & -3 < y < 0 \\ \dfrac{4-y}{2} & 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

Oppgave 6

1. r1(t) := Vektor(−10 + 6 t, 35 − 3 t)

   $\rightarrow \; \mathbf{r1(t)} := \begin{pmatrix} 6t - 10 \\ -3t + 35 \end{pmatrix}$

2. r2(t) := Vektor(2 + 5 t, 4 t)

   $\rightarrow \; \mathbf{r2(t)} := \begin{pmatrix} 5t + 2 \\ 4t \end{pmatrix}$

3. v1(t) := |r1′(t)|

   $\approx \; \mathbf{v1(t) := 6.708}$

4. v2(t) := |r2′(t)|

   $\approx \; \mathbf{v2(t) := 6.403}$

5. d(t) := |r1(t) − r2(t)|

   $\approx \; \mathbf{d(t)} := \sqrt{50t^2 - 514t + 1369}$

6. d(0)

   $\rightarrow \; \mathbf{37}$

7. Løs(d′(t) = 0, t, {d″(t) > 0})

   $\rightarrow \; \left\{ t = \frac{257}{50} \right\}$

8. $7

   $\approx \; \{t = 5.14\}$

9. d(HøyreSide($8, 1))

   $\approx \; \mathbf{6.93}$

a)

I celle 1-4 regnes det ut. Fuglene flyr nesten like fort med 6.7 m/s og 6.4 m/s.

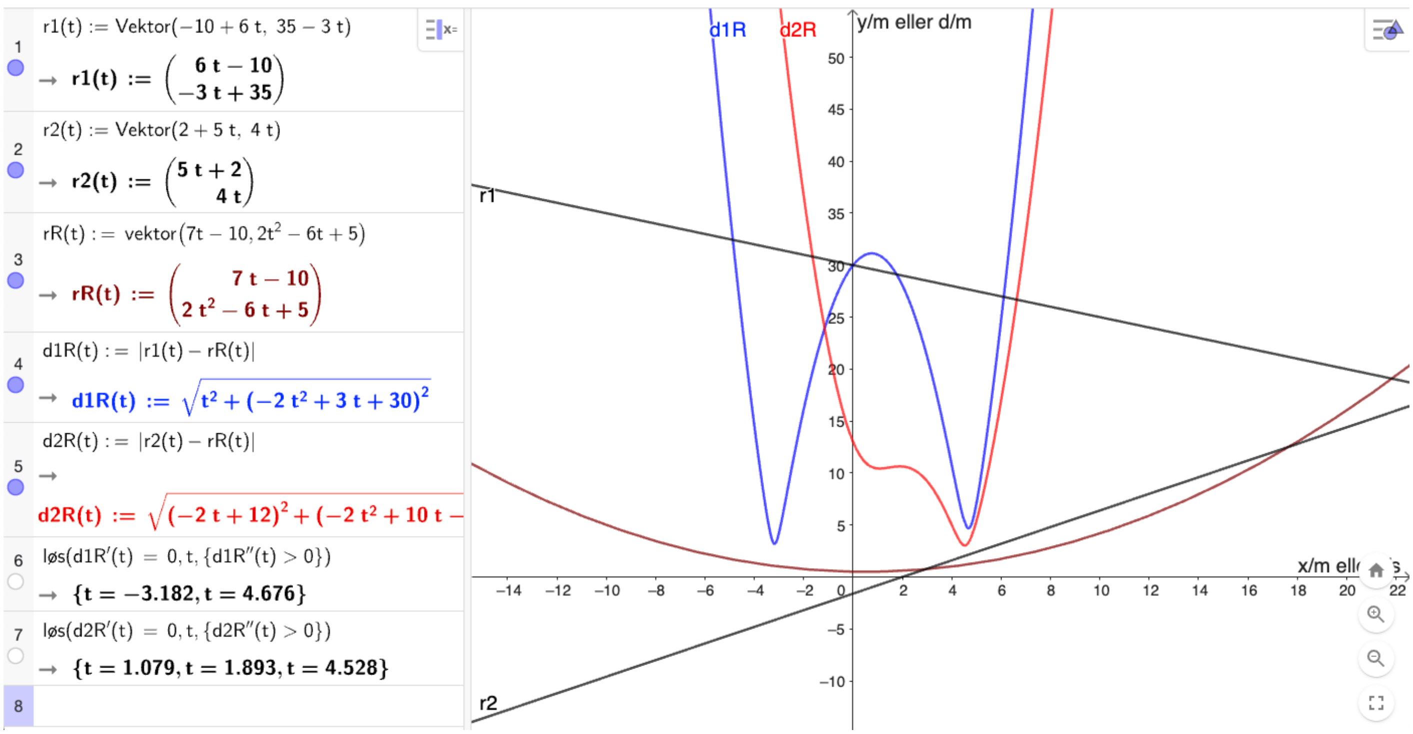
b)

I celle 5 og 6 regnes dette ut. Avstanden ved $t = 0$ er 37 m.

c)

Dette er regnet ut i celle 7 - 9. De er nærmest hverandre etter 5.14 sekunder, og den minste avstanden er 6.93 m.

d)



De to rette linjene er vektorfunksjonene for småfuglene, den brune er vektorfunksjonen til rovfuglen (Geogebra ville ikke vise navn på den grafen). Aksene er x/m og y/m for parameterfremstillingene. I tillegg er det to distansefunksjoner for avstanden mellom rovfugl og fugl 1 (blå), og mellom rovfugl og fugl 2 (rød).

Utifra grafene ser det ut til at rovfuglen har siktet seg inn på fugl 2. Etter omtrent 1.08 sekunder har rovfuglen peilet seg inn bak fugl to. Avstanden er litt i overkant av 10 meter. Den tar innpå fuglen, og den minste avstanden kan vi se fra den blå grafen at var rundt 2,5 m, ikke nok til å slå klørne i fuglen. På samme tidspunkt er fugl 1 omtrent 5 meter unna. Rovfuglen hadde med andre ord gode muligheter for en middag, men den gang ei. Bedre lykke neste gang, kanskje rovfuglen velger en annen matematisk funksjon neste gang.