Løsningsforslag for eksamen i matematikk R2 V25

Del 1

Oppgave 1

a)

$$\int_0^1 \left(2e^x + 2x^2\right)\, dx = \left[2e^x + \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = 2e + \frac{2}{3} - (2+0) = 2e - \frac{4}{3}$$

b)

$$\int \frac{2x-1}{x^2-x-6}\, dx = \int \frac{2x-1}{u}\,\frac{du}{2x-1} = \int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| + C = \ln\left|x^2-x-6\right| + C$$

Her har jeg brukt $u = x^2 - x - 6$, $u' = 2x - 1$ og $dx = \frac{du}{u'}$.

Oppgave 2

Det ubestemte integralet vårt gir oss:

$$f(x) \int -\frac{2}{x^3}\, dx = \int -2x^{-3}\, dx = x^{-2} + C = \frac{1}{x^2} + C$$

Videre skal vi ha at

$$\begin{aligned}
\int_1^2 f(x)\, dx = \int_1^2 f(x)\, dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + C\right)\, dx &= \frac{11}{14} \\
\left[-\frac{1}{x} + Cx\right]_1^2 &= \frac{11}{14} \\
-\frac{1}{2} + 2C - \left(-\frac{1}{1} + C\right) &= \frac{11}{14} \\
C + \frac{1}{2} &= \frac{11}{14} \\
C &= \frac{11}{14} - \frac{1}{2} = \frac{11}{14} - \frac{7}{14} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}
\end{aligned}$$

Funksjonen f er da

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{7}$$

Oppgave 3

a)

Vi kan se at $a_1 = 2$, og at den rekursive sammenhengen er $a_{n+1} = a_n + n + 2$. Eleven prøver å skrive ut de 5 første leddene i rekken. Vi kan regne dem ut:

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + 1 + 2 = 2 + 1 + 2 = 5 \\
a_3 &= a_2 + 2 + 2 = 5 + 2 + 2 = 9 \\
a_4 &= a_3 + 3 + 2 = 9 + 3 + 2 = 14 \\
a_5 &= a_4 + 4 + 2 = 14 + 4 + 2 = 20
\end{aligned}
$$

Koden vil skrive ut tallene 2, 5, 9, 14, 20.

b)

Eleven jobber med den samme følgen, men denne gangen er ute etter å regne ut s_5. Resultatet blir:

$$2 + 5 + 9 + 14 + 20 = 16 + 34 = 50$$

c)

Vi har rekken

$$a_{n+1} = a_n + n + 2, \quad a_1 = 2$$

Hypotesen er at

$$a_n = \frac{n(n+3)}{2}, \quad n \geq 1$$

Vi undersøker om det stemmer for $n = 1$:

Rekursiv: $a_2 = 5$ (regnet ut tidligere)

Eksplisitt: $a_1 = \dfrac{1(1+3)}{2} = 2$, $a_2 = \dfrac{2(2+3)}{2} = 5$

Vi ser at formelen stemmer for noen tall $n = 1, \ldots, k$. Undersøker så om det er slik at hvis den stemmer for ett tall vi kaller a_k, så medfører det automatisk at den stemmer for a_{k+1}:

Rekursiv:

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= a_k + k + 2 \\
a_{n+1} &= \frac{k(k+3)}{2} + k + 2 = \frac{k(k+3)}{2} + \frac{2k+4}{2} = \frac{k^2 + 3k + 2k + 4}{2} \\
a_{n+1} &= \frac{k^2 + 5k + 4}{2}
\end{aligned}
$$

Eksplisitt:

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= \frac{(k+1)(k+1+3)}{2} = \frac{(k+1)(k+4)}{2} = \frac{k^2 + k + 4k + 4}{2} = \frac{k^2 + k + 4k + 4}{2} \\
a_{k+1} &= \frac{k^2 + 5k + 4}{2}
\end{aligned}
$$

Den rekursive og eksplisitte formelen ga samme svar for $n = k + 1$ under antakelsen at $a_k = \frac{n(n+3)}{2}$, da gjelder formlelen for alle $n \in \mathbb{N}$.

Oppgave 4

a)

$$f(x) = 2\sqrt{3}\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right), \quad D_f = \left\langle 0,\, \frac{\pi}{2}\right\rangle$$

En generell harmonisk svingning er på formen:

$$f(x) = A\sin(cx + \phi) + d$$

Dermed kan vi lese av:

$$A = 2\sqrt{3}, \quad c = 2, \quad \phi = \frac{\pi}{6}, \quad d = 0$$

Vi trenger perioden:

$$T = \frac{2\pi}{c} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Det gir oss:

Amplitude: $A = 2\sqrt{3}$
Likevektslinje: $d = 0$
Periode: $T = \pi$
Faseforskyvning: $\phi = \frac{\pi}{6}$

b)

$$2\sqrt{3}\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$$
$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

Vi husker at $\sin(30^\circ) = \sin 150^\circ = \frac{1}{2}$. Dermed får vi løsningene:

$$2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi \quad \vee \quad 2x + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi$$
$$2x = k\cdot 2\pi \quad \vee \quad 2x = \frac{4\pi}{6} + k\cdot 2\pi$$
$$x = k\cdot\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{3} + k\cdot\pi$$

Fra definisjonsmengden ser vi at løsningene er i første kvadrant, uten $x = 0$ og $x = \frac{\pi}{2}$. Da er det bare én gyldig løsning:

$$x = \frac{\pi}{3}$$

c)

$$g(x) = 3\sin(2x) + \sqrt{3}\cos(2x)$$

Vi omgjør til sinus:

$$A = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$
$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}, \quad \text{i første kvadrant}$$

Dermed er

$$g(x) = 2\sqrt{3}\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = f(x)$$

Likningen er den samme som tidligere, men med en ny definisjonsmengde $D_g = \langle 0, 2\pi \rangle$. Vi kan derfor se på de forrige generelle løsningene:

$$\begin{array}{ccc} x = k \cdot \pi & \vee & x = \dfrac{\pi}{3} + k \cdot \pi \\ \downarrow & & \downarrow \\ x = \pi & & x = \dfrac{\pi}{3} \\ & & x = \dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{4\pi}{3} \end{array}$$

Dermed er løsningsmengden:

$$L = \left\{ \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{4\pi}{3} \right\}$$

Oppgave 5

a)

Vi starter med å alge vektorene:

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= [2,\ 3,\ 0], & \vec{AC} &= [1,\ 4,\ 1] \\ \vec{BA} = -\vec{AB} &= [-2,\ -3,\ 0], & \vec{BC} &= [1-2,\ 4-3,\ 1-0] = [-1,\ 1,\ 1] \\ \vec{CA} = -\vec{AC} &= [-1,\ -4,\ -1], & \vec{CB} &= -\vec{BC} = [1,\ -1,\ -1] \end{aligned}$$

Da må vi avgjøre om noen av skalarproduktene nedenfor blir negative.

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= 2 + 12 + 1 > 0 \\ \vec{BC} \cdot \vec{BA} &= 2 + -3 + 0 < 0 \\ \vec{CA} \cdot \vec{CB} &= -1 + 4 + 1 > 0 \end{aligned}$$

Vi ser at vinkel B er større enn $90°$ ettersom skalarproduktet blir negativt.

b)

$$T = \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right|$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = [3,\ -2,\ 5]$$

$$T = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 5^2} = \frac{1}{2}\sqrt{9 + 4 + 25} = \frac{1}{2}\sqrt{38}$$

c)

Vi kan starte med å lage en parameterframstilling for linja:
$\vec{r_l} = \vec{OE} - \vec{OD} = [2,\ 3,\ 2] - [3,\ 7,\ 3] = [-1,\ ,-4,\ -1]$.
Vi undersøker om linjen er parallell med planet:

$$[3,\ -2,\ 5] \cdot [-1,\ ,-4,\ -1] = -3 - 8 - 5 = 0$$

Vi ser at normalvektoren til planet er vinkelrett på retningsvektoren til linja, planet og linja er med andre ord parallelle. Ettersom grenen eksisterer, kan den ikke være i bordplanet, og dermed vil den aldri treffe bordplaten.

Oppgave 6

Fra while-løkken, ser vi at det summeres

```
s+f(x)dx+g(x)dx
```

Koden regner altså ut

$$\int_0^2 f(x)\,dx + \int_0^2 g(x)\,dx = \int_0^2 (f(x)+g(x))\;dx = \int_0^2 x^3 - 2x^2\,dx$$
$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{2}{3}\cdot 2^3 - 0 = 2^4\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)$$
$$= 2^4\cdot\left(-\frac{1}{12}\right) = -\frac{2^2}{3} = -\frac{4}{3}$$

Oppgave 7

a)

$$v = \frac{b}{r} = \frac{4}{3}, \quad \text{i radianer}$$
$$v^\circ = \frac{v}{\pi}\cdot 180^\circ = \left(\frac{240}{\pi}\right)^\circ$$

b)

$$\tan u = \frac{\sin u}{\cos u} = 2 \quad\Leftrightarrow\quad \sin u = 2\cos u$$

Jeg tenkte på hvilke formler som kan være relevante her, og kom på noe smart når jeg tenkte på enhetsformelen.

$$\begin{aligned}\sin^2 u + \cos^2 u &= 1\\ (2\cos u)^2 + \cos^2 u &= 1\\ 5\cos^2 u &= 1\\ \cos u &= \pm\sqrt{\frac{1}{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

Da må

$$\sin u = 2\cos u = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Ettersom vinkelen er i første kvadrant, velger vi de positive løsningene:

$$\cos u = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \sin u = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Del 2

Oppgave 1

1	$r(t) := \left(4\cos\left(\frac{\pi}{5}t\right), 4\sin\left(\frac{\pi}{5}t\right)+2, 5+\frac{1}{3}t\right)$ $\rightarrow\ \mathbf{r(t) := \left(4\cos\left(t\frac{\pi}{5}\right), 4\sin\left(t\frac{\pi}{5}\right)+2, \frac{1}{3}t+5\right)}$
2	$z(r(5))$ $\approx\ \mathbf{6.667}$
3	$v(t) := r'(t)$ $\rightarrow\ \mathbf{v(t) := \left(-4\cdot\frac{\pi}{5}\sin\left(t\frac{\pi}{5}\right), 4\cdot\frac{\pi}{5}\cos\left(t\frac{\pi}{5}\right), \frac{1}{3}\right)}$
4	$\lvert v(10)\rvert$ $\approx\ \mathbf{2.535}$
5	$c := \frac{\pi}{5}$ $\approx\ \mathbf{c := 0.628}$
6	$T := \frac{2\pi}{c}$ $\approx\ \mathbf{T := 10}$
7	$h(t) := z(r(t))$ $\rightarrow\ \mathbf{h(t) := \frac{1}{3}t+5}$
8	$h(T) - h(0)$ $\approx\ \mathbf{3.333}$

a)

Se rad 5. Ettersom xy-planet er bakkenivå, så er det z-koordinatet som tilsvarer høyden over bakken. Høyde over bakken er dermed omtrent 6.7 meter etter 5 sekunder.

b)

Se rad 3 og 4. Etter 10 sekunder har bilen omtrentlig fart på 2.5 m/s.

c) Jeg ser at x- og y-koordinatene er harmoniske svingninger med frekvens $\pi/5$. I rad 5 definerer jeg denne frekvensen og regner ut perioden i rad 6. Det betyr at det tar 10 sekunder å fullføre en runde oppover i parkeringshuset. Jeg lager så en en høydefunksjon ved å hente ut z-komponenten av posisjonsvektoren i rad 7, og regner ut høydedifferansen på tvers av en periode i rad 8. Høyden mellom etasjene er omtrent 3.3 meter fra gulvnivå til gulvnivå.

Oppgave 2

a)

Innskuddene med rentene danner en geometrisk rekke med $k = 1.025$. Innskuddene er ukjente. Før vi går til geogebra, så må vi finne et uttrykk for rekken. Det er ett innskudd i året, og vi teller med startåret. Vi ønsker at siste innskuddet skal få renter på seg én gang. Det gir oss:

$$a_1 = x \cdot 1.025$$
$$k = 1.025$$

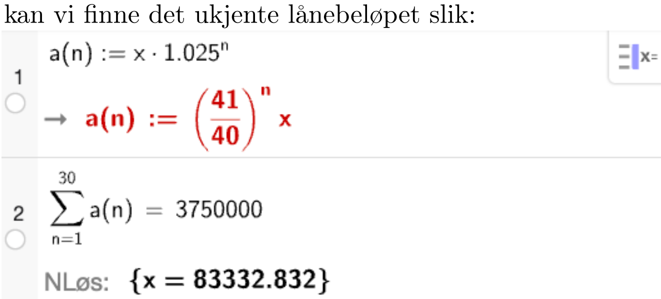
Da har vi en geometrisk rekke der leddene er gitt ved:

$$a_n = x \cdot 1.025 \cdot 1.025^{n-1} = x \cdot 1.025^n$$

Vi må så regne ut hvor mange renteperioder det er snakk om. 2026 er første, og 2055 er siste. Da kan vi finne antall renteperioder som

$$2055 - 2026 + 1 = 30$$

Da kan vi finne det ukjente lånebeløpet slik:



Hun må altså sette inn ca 83333 kr inn på konto hvert år.

b)

Summen av nåverdiene til terminbeløpene skal tilsvare lånesummen i 2026. Rekken er dermed gitt ved:

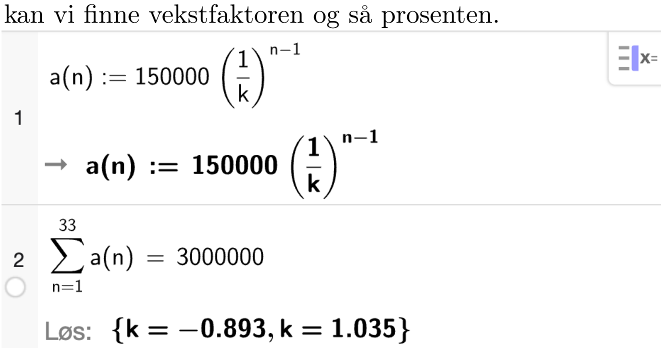
$$a_1 = 150000$$
$$k = ?$$

$$a_n = 150000 \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^{n-1}$$

Vi finner antall ledd ved å finne differansen mellom årstallene og så telle med 2026 som et nedbetalingsår:

$$2058 - 2026 + 1 = 33$$

Da kan vi finne vekstfaktoren og så prosenten.



Hun har antatt omtrent 3.5 % rente.

Oppgave 3

1. $v(t) := 8.3 - 17.4\, e^{-5t} + 9.1\, e^{-0.08t}$

$\rightarrow\ v(t) := \frac{-87}{5} e^{-5t} + \frac{91}{10} e^{\frac{-2}{25} t} + \frac{83}{10}$

2. $v'(t) = 0$

Løs: $\left\{ t = \frac{25}{123} \ln\left(\frac{10875}{91}\right) \right\}$

3. $2

$\approx\ \{t = 0.972\}$

4. $\int_0^7 v(t)\, dt$

$\approx\ 103.395$

5. $\int_0^T v(t)\, dt$

$\rightarrow\ \frac{1}{10} \left(\frac{1}{10} \cdot \frac{830\, T \left(e^{\frac{1}{25} T}\right)^{125} - 11375 \left(e^{\frac{1}{25} T}\right)^{123} + 348}{\left(e^{\frac{1}{25} T}\right)^{125}} + \frac{11027}{10} \right)$

6. NLøs($5 = 200, T = 0)

$\rightarrow\ \{T = 14.954\}$

7. Tx := HøyreSide($6, 1)

$\approx\ Tx := 14.954$

8. $vg := \frac{1}{Tx} \cdot$ integral(v(t), 0, Tx)

$\approx\ vg := 13.374$

a)

I rad 1-3 ser vi at akselerasjonen blir 0 etter 0.97 s. Ettersom akselerasjon er den deriverte av fart, altså momentan endring, så betyr det at vi har et ekstremalpunkt i fart.

b) I rad 4 ser vi at forflytningen er på omtrent 103 m etter 7 sekunder.

c)

Først må vi finne hvor lang tid det tar for haren å løpe 200 m. Det gjøres i celle 5 og 6. Det gikk ikke å løse likningen for selve integralet, så jeg regnet ut den først og brukte “NLøs” med startpunkt i $t = 0$. Når jeg hadde denne tiden regnet jeg svaret i celle 8. Gjennomsnittsfarten var på omtrent 13.4 m/s.

Oppgave 4

Det er ikke noen direkte sammenheng mellom integrandene (det inni integralene) og rekken nedenfor, så la oss starte med å regne ut integralene (uten integrasjonskonstantene) i rekken vi fikk oppgitt:

$$\int 1\,dx + \int x\,dx + \int x^2\,dx + \ldots = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1-x}\,dx &= \int \frac{1}{u}\,\frac{du}{u'} = \int -\frac{1}{u}\,du \\ &= -\ln|1-x|\end{aligned}$$

Hvis vi ser på rekken nedenfor, ser vi at den følger samme mønster, der $x = \frac{1}{2}$ som passer med definisjonsmengden $x \in \langle -1, 1\rangle$. Dermed er det slik at

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \ldots &= -\ln\left|1-\frac{1}{2}\right| = -\ln\frac{1}{2} \\ &= -\ln 2^{-1} = \ln 2\end{aligned}$$

Q.E.D